

**Горбійчук М.І.**

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

**Лазорів Н.Т.**

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

**Козутяк М.І.**

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

**Лазорів А.М.**

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

## СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ЗА ПАРАМЕТРАМИ КОМПЕНСАТОРА ПЕРЕХРЕСНИХ ЗВ'ЯЗКІВ АВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

*Муфельні печі з двома незалежними джерелами живлення крім прямих каналів впливу вхідних величин на вихідні величина мають перехресні канали такого впливу, що значно ускладнює автоматичне керування тепловим режимом печі. Одним із методів компенсації перехресних впливів є введення в контур керування компенсатора перехресних зв'язків.*

*На основі експериментальних досліджень були отримані передавальні функції кожного каналу передачі сигналів. Всі чотири передавальні функції мають третій порядок. Показано, що синтез автономної системи керування, породжує компенсатор перехресних зв'язків, який характеризується чотирьома однаковими за структурою передавальними функціями, кожна із яких має шістнадцятий порядок. Такий високий порядок передавальних функцій значно ускладнює їх практичну реалізацію на сучасних мікропроцесорах (контролерах). Тому виникла задача спрощення передавальних функцій компенсатора без суттєвої втрати ефективності його функціонування.*

*Аналіз літературних джерел показав, що на теперішній час є цілий ряд методів і способів спрощення математичних моделей динамічних систем. Недоліком проаналізованих робіт є відсутність формалізованих критеріїв, за допомогою яких можна оцінити ступінь наближення редукованої моделі до свого «оригіналу». Одним із способів подолати вказаний недолік є застосування методу Ганкеля для редукації моделей, які задані у вигляді передавальних функцій. На відміну від частотних характеристик, які характеризують розподіл енергії за частотами, метод Ганкеля дає змогу визначити розподіл енергії за станами об'єкта, яка графічно відображається у вигляді стовбцевої діаграми. За домінуючими стовбцями на діаграмі Генкеля були визначені порядки передавальних функцій редукованої моделі. Встановлено, що порядки передавальних функцій компенсатора можна знизити з шістнадцяти до трьох. Точність редукованої моделі по відношенню до «оригіналу» перевірялась зіставленням їх перехідних і частотних характеристик, що дало змогу встановити несуттєву їх різницю.*

**Ключові слова:** муфельна піч, передавальна функція, редукація моделей, метод Ганкеля, точність.

**Постановка проблеми.** Муфельні печі невеликі за розміром теплові об'єкти, які широко поширені як при лабораторних дослідженнях, так і в промисловості і призначені для нагрівання невеликих за розміром виробів.

Для створення температурного режиму в муфельній печі використовують нагрівники з високим питомим омичним опором. Конструктивно нагрівники виконані у формі стержнів або трубок.

У більшості випадків для створення необхідного температурного режиму використовують одне джерело живлення. У таких печах для стабілізації температури використовують однока-

нальні регулятори [1], які мають у своєму складі датчик температури, мікропроцесорний пристрій (контролер) і тиристорний виконавчий механізм. За допомогою останнього до нагрівника підводиться необхідна потужність.

Муфельні печі відносяться до апаратів циклічної дії. Кожний цикл включає в себе період нагрівання, витримки при заданій температурі і охолодження. Для зменшення часу на нагрівання використовують печі з двома нагрівниками, кожен із яких має своє джерело живлення.

Ефективність роботи муфельної печі характеризується точністю підтримання заданої температури

на етапі витримки. Наявність двох незалежних джерел живлення породжує перехресні зв'язки, що погіршує якість процесу керування. Одним із способів «ліквідації» перехресних зв'язків або значного зменшення їх впливу є уведення в контур керування компенсатора перехресних зв'язків.

Дослідження показали [1], що динамічні властивості муфельної печі з двома незалежними джерелами живленнями описуються чотирьом однотипними передавальними функціями третього порядку. У такому випадку динаміка синтезованого компенсатора перехресних зв'язків буде характеризуватись також чотирьом передавальними функціями, порядок кожної із яких визначається за формулою [2]  $N = 2(3n - 1)$ . При  $n=3$  порядок кожна із передавальних функцій буде мати порядок  $N=16$ . Такий високий порядок кожної передавальної функції компенсатора значно ускладнює його технічну реалізацію за допомогою сучасних мікро контролерів.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Сучасні комп'ютеризовані системи збору і оброблення інформації в системах керування характеризуються складністю їх структур і режимів, підвищеними вимогами до якості функціонування таких систем (швидкодія, точність, надійність тощо). Ці чинники зумовлюють підвищені вимоги щодо якості математичних моделей, які описують поведінку технологічних об'єктів.

Прагнення дослідника отримати модель, яка адекватно відтворює функціонування об'єкта, часто вступає в протиріччя з обчислювальними можливостями комп'ютерно-інтегрованих систем, що працюють у режимі реального часу. Тому доцільно застосовувати замість складних моделей простіші (редуковані), які в певному сенсі зберігають інформативність результатів моделювання.

При математичному описі статички об'єктів за результатами експериментальних досліджень часто модель вибирають у вигляді полінома певного степені. У таких випадках редукцію поліноміальних моделей здійснюють із застосуванням методу групового врахування аргументів [3] та методу генетичних алгоритмів [4]. Суть методів у тому, що із заданої множини поліноміальних моделей за певним критерієм вибирають ту модель яка найбільше «приспосована» до експериментальних даних.

Динаміка більшості технологічних об'єктів описується нелінійними диференціальними рівняннями, які при малих відхиленнях незбуреного руху замінюють редукованою лінійними моделями [5]. Спрощення математичних моделей сто-

суться систем і об'єктів як з розподіленими, так і зосередженими параметрами.

Для моделей з розподіленими параметрами найчастіше застосовують метод розділення змінних (метод Фур'є) [6], який передбачає подання функції декількох просторових змінних та часу у вигляді нескінченного ряду, кожний член якого добуток двох функцій однієї змінної – часу та просторових координат.

Для об'єктів із зосередженими параметрами використовують різні прийоми спрощення моделей. Так, в роботі [7] зниження порядку диференціального рівняння здійснено шляхом нехтування малих значень постійних часу. Адекватність редукованих моделей оцінювалось, виходячи із аналізу фізичної сутті процесу.

Інший підхід для оцінки точності процесу редукції моделі запропонований в роботі [8]. Для оцінки точності використано приведену максимальну похибку

$$\Phi = \frac{\max_{t \in [t_0, t_f]} |\Delta Y(t)|}{\max_t |\bar{Y}(t)|},$$

де  $\Delta Y(t)$  – відхилення редукованої від «оригінальної» моделі;  $\bar{Y}(t)$  – оригінальна модель.

Недоліком прийомів редукції математичних моделей використаних в роботах [7] і [8] є відсутність формалізованого визначення критеріїв «малі постійні часу», «точність моделі».

У тому випадку, коли математична модель динаміки об'єкта (системи) має високий порядок спрощення таких моделей здійснюють за методом Ганкеля [9–11]. Слід відмітити, що метод Ганкеля працює у тому випадку, коли характеристичне рівняння системи має домінуючі ліві корені.

**Метою роботи** є спрощення передавальних функцій компенсатора перехресних зв'язків, що дасть змогу реалізувати його програмно на сучасних мікро контролерах.

Поставлена мета досягнута внаслідок розв'язання таких задач:

- здійснено аналіз літературних джерел і виявлено, що ефективним способом пониження порядку моделі є метод Ганкеля;

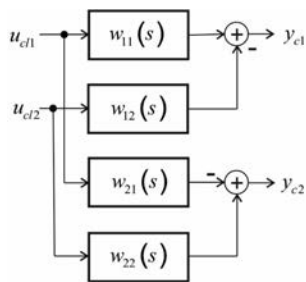
- на основі методу Ганкеля розроблена методика отримання редукованої моделі і розроблено відповідне алгоритмічне і програмне забезпечення;

- оцінена точність процесу редукції та зроблений висновок про значне скорочення порядків передавальних функцій компенсатора без суттєвої різниці між редукованою моделлю і її «оригіналом».

**Спрощення моделей компенсатора перехресних зв'язків методом Ганкеля.** У даній роботі розглядається тип муфельних печей, які мають два роздільних джерела живлення, що зумовлює наявність двох каналів передачі керуючих впливів, наявність яких породжує додаткові зв'язки, що значно погіршує якість керування такими об'єктами. Одним із способів зменшення взаємовпливу вхідних величин на регульовані вихідні величини є введення у контур системи керування компенсатора перехресних зв'язків, призначення яких повністю ліквідувати або значно зменшити такі взаємовпливи [1].

Структурна схема компенсатора зображена [2] на рисунку 1, а параметри передавальних функцій муфельної печі як об'єкта автоматичного керування вміщує таблиця 1.

На рисунку 1  $u_{c1}$  і  $u_{c2}$  – вихідні сигнали регуляторів, а  $y_{c1}$  і  $y_{c2}$  – виходи компенсатора, які є командними сигналами, що поступають на об'єкт керування.



**Рис. 1. Структурна схема компенсатора перехресних зв'язків**

Передавальні функції компенсатора  $w_{ij}(s)$ ,  $i = j = 1, 2$  обчислюють [2] за такими формулами:

$$w_{11}(s) = \frac{W_{11}(s)W_{22}(s)}{\Delta(s)}; \quad w_{12}(s) = -\frac{W_{12}(s)W_{22}(s)}{\Delta(s)};$$

$$w_{21}(s) = -\frac{W_{21}(s)W_{11}(s)}{\Delta(s)}; \quad w_{22}(s) = \frac{W_{11}(s)W_{22}(s)}{\Delta(s)},$$

де  $\Delta(s) = W_{11}(s)W_{22}(s) - W_{12}(s)W_{21}(s)$ .

Можна показати [2], що порядки поліномів чисельників і знаменників передавальних функцій  $w_{ij}(s)$ ,  $i = j = 1, 2$  компенсатора мають однакові порядки і дорівнюють  $2(3n - 1)$ , де  $n$  – порядок передавальних функцій  $W_{ij}(s)$ ,  $i = j = 1, 2$ . Як випливає із таблиці 1 всі передавальні функції об'єкта мають однакові порядки і  $n=3$ .

За допомогою програмного забезпечення, розробленого в середовищі MatLab, отримані передавальні функції компенсатора перехресних зв'язків. Загальна структура передавальної функції компенсатора має вигляд

$$w(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n_c} b_i s^{n_c - i}}{\sum_{k=1}^{n_c} a_k s^{n_c - k}}. \quad (1)$$

де  $n_c=16$ .

Коефіцієнти передавальних функцій (1) для відповідних каналів передачі сигналів наведені у табл. 2–4.

Математичну модель компенсатора (рис. 1) запишемо у матрично-векторній формі

$$\begin{bmatrix} y_{c1}(s) \\ y_{c2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{c1}(s) \\ u_{c2}(s) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Із рівняння (2) знаходимо

$$y_{c1}(s) = w_{11}(s)u_{c1}(s) + w_{12}(s)u_{c2}(s),$$

$$y_{c2}(s) = w_{21}(s)u_{c1}(s) + w_{22}(s)u_{c2}(s).$$

Для лінійних систем справедливий принцип суперпозиції. Тому

$$y_{c1}(t) = y_{11}(t) + y_{12}(t), \quad (3)$$

$$y_{c2}(t) = y_{22}(t) + y_{21}(t), \quad (4)$$

де  $y_{11}(t) = L^{-1}[w_{11}(s)u_{c1}(s)]$ ;

$y_{12}(t) = L^{-1}[w_{12}(s)u_{c2}(s)]$ ;

$y_{22}(t) = L^{-1}[w_{22}(s)u_{c2}(s)]$ ;

$y_{21}(t) = L^{-1}[w_{21}(s)u_{c1}(s)]$ .

Символом  $L^{-1}$  позначено зворотнє перетворення Лапласа.

Таблиця 1

**Параметри емпіричних моделей**

| Передавальні функції | $k$    | Параметри чисельника ПФ |        |       | Параметри знаменника ПФ |          |        |       |
|----------------------|--------|-------------------------|--------|-------|-------------------------|----------|--------|-------|
|                      |        | $b_0$                   | $b_1$  | $b_2$ | $a_0$                   | $a_1$    | $a_2$  | $a_3$ |
| $W_{11}(s)$          | 468.25 | 7828.23                 | 97.77  | 1     | 559116.88               | 16854.16 | 206.53 | 1     |
| $W_{12}(s)$          | 150,00 | 10401.34                | 136.80 | 1     | 1596016.46              | 34051.10 | 290.59 | 1     |
| $W_{21}(s)$          | 459.25 | 7724.32                 | 97.20  | 1     | 612374.61               | 17821.93 | 211.50 | 1     |
| $W_{22}(s)$          | 172.88 | 9560.48                 | 111.38 | 1     | 1133264.06              | 26531.02 | 254.91 | 1     |

Таблиця 2

Параметри коректора по каналу  $w_{11}(s) = w_{22}(s)$

| $i,k$ | $b_i$    | $a_k$    | $i,k$ | $b_i$    | $a_k$    |
|-------|----------|----------|-------|----------|----------|
| 0     | 3.752e36 | 1.53e36  | 9     | 2.269e22 | 5.466e21 |
| 1     | 4.807e35 | 1.856e35 | 10    | 1.752e20 | 3.96e19  |
| 2     | 3.016e34 | 1.101e34 | 11    | 1.09e18  | 2.306e17 |
| 3     | 1.225e33 | 4.229e32 | 12    | 5.349e15 | 1.059e15 |
| 4     | 3.597e31 | 1.173e31 | 13    | 2.007e13 | 3.711e12 |
| 5     | 8.081e29 | 2.486e29 | 14    | 5.431e10 | 9.366e09 |
| 6     | 1.435e28 | 4.16e27  | 15    | 9.493e07 | 1.523e07 |
| 7     | 2.053e26 | 5.601e25 | 16    | 8.095e04 | 1.206e04 |
| 8     | 2.389e24 | 6.128e23 |       |          |          |

Таблиця 3

Параметри коректора по каналу  $w_{12}(s)$

| $i,k$ | $b_i$      | $a_k$    | $i,k$ | $b_i$      | $a_k$    |
|-------|------------|----------|-------|------------|----------|
| 0     | -1.597e36  | 4.367e36 | 9     | - 8.863e21 | 8.489e21 |
| 1     | - 2.057e35 | 4.912e35 | 10    | - 6.688e19 | 5.778e19 |
| 2     | - 1.291e34 | 2.711e34 | 11    | - 4.055e17 | 3.163e17 |
| 3     | - 5.224e32 | 9.704e32 | 12    | - 1.938e15 | 1.365e15 |
| 4     | - 1.523e31 | 2.514e31 | 13    | - 7.064e12 | 4.492e12 |
| 5     | -3.385e29  | 4.985e29 | 14    | - 1.855e10 | 1.064e10 |
| 6     | - 5.93e27  | 7.815e27 | 15    | - 3.142e07 | 1.625e07 |
| 7     | - 8.346e25 | 9.869e25 | 16    | -25932     | 1.206e04 |
| 8     | - 9.531e23 | 1.014e24 |       |            |          |

Таблиця 4

Параметри коректора по каналу  $w_{21}(s)$

| $i,k$ | $b_i$      | $a_k$    | $i,k$ | $b_i$      | $a_k$    |
|-------|------------|----------|-------|------------|----------|
| 0     | -8.053e36  | 8.267e35 | 9     | - 5.447e22 | 4.262e21 |
| 1     | - 1.039e36 | 1.05e35  | 10    | - 4.273e20 | 3.203e19 |
| 2     | - 6.58e34  | 6.511e33 | 11    | - 2.699e18 | 1.934e17 |
| 3     | - 2.702e33 | 2.609e32 | 12    | - 1.346e16 | 9.205e14 |
| 4     | - 8.03e31  | 7.541e30 | 13    | - 5.123e13 | 3.341e12 |
| 5     | -1.828e30  | 1.664e29 | 14    | - 1.406e11 | 8.733e09 |
| 6     | - 3.292e28 | 2.896e27 | 15    | - 2.491e08 | 1.471e07 |
| 7     | - 4.779e26 | 4.053e25 | 16    | -2.15e05   | 1.206e04 |
| 8     | - 5.647e24 | 4.605e23 |       |            |          |

На рисунку 2 зображені графіки функцій  $y_{c1}(t)$  і  $y_{c2}(t)$ , які побудовані за допомогою програмного забезпечення, створеного в середовищі MatLab. На всі входи компенсатора подавався одиничний стрибкоподібний сигнал. Тому  $u_{c1}(s) = u_{c2}(s) = \frac{1}{s}$ . Із формули (1) та із таблиць 2–4 випливає, що поліноми чисельників і знаменників мають однакові порядки і дорівнюють 16. При такому високому порядку передавальних функцій виникають певні труднощі практичної їх реалізації на промислових контролерах. Тому доцільно передавальні функції компенсатора (1) апроксимувати передавальними функціями нижчого порядку.

Динамічні властивості будь-якої фізичної системи визначаються певним частотним діапазоном, поза яким об'єкт не чутливий до гармонічних збурень.

Визначимо логарифмічні частотні характеристики кожного каналу передачі сигналу компенсатора з передавальними функціями  $w_{ij}(s)$ ,  $i = j = 1, 2$ , які визначені формулою (1), а їх параметри вміщує таблиці 2–4. З огляду на те, що передавальні функції компенсатора перехресних зв'язків мають тотожні структури у подальших викладках будемо опускати індекси при відповідних передавальних функціях.

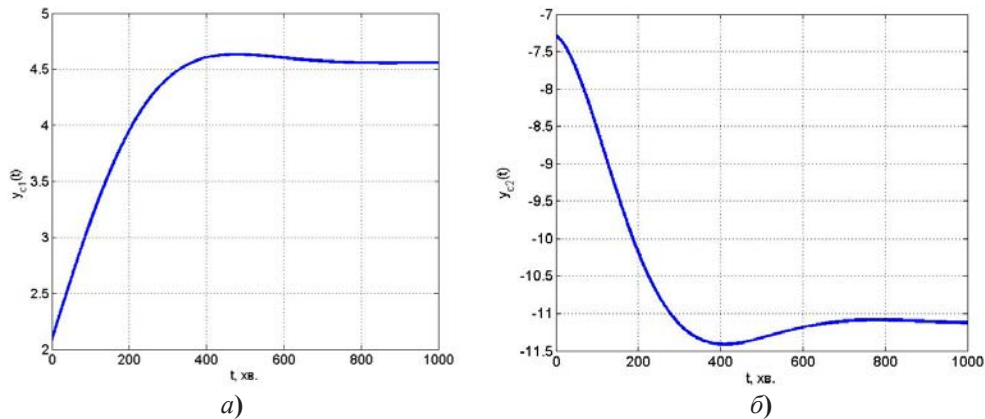


Рис. 2. Графіки залежностей  $y_{c1}(t)$ ,  $a$  і  $y_{c2}(t)$ ,  $b$

За визначенням логарифмічна амплітудно-частотна характеристика каналу компенсатора з передавальною функцією (1) буде такою:

$$L(\omega) = 20 \log |w(j\omega)|,$$

де  $|\bullet|$  – модуль комплексної величини.

Відповідно, логарифмічна фазо-частотна характеристика є такою:

$$\varphi(\omega) = \arg w(j\omega),$$

де  $\omega$  – частота в логарифмічному масштабі.

Відомо, що частотні характеристики дають уявлення про розподіл енергії сигналів за частотами. Розподіл енергії за станами можна визначити, якщо скористатись сингулярними числами Ганкеля [9].

Кожній передавальній функції компенсатора  $w(s)$  поставимо у відповідність математичні моделі у просторі станів. Для цього запишемо диференціальне рівняння відповідного каналу компенсатора, яке відповідає передавальній функції  $w(s)$ . Отже,

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (5)$$

де  $a_i, b_j, i = j = \overline{1, n} (n = 16)$

Рівняння (5) можна подати у вигляді системи диференціальних рівнянь, кожне із яких є рівнянням першого порядку, яка в матричній формі має такий вигляд [12]:

$$A\dot{\bar{b}} = \bar{b}, \quad (6)$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Із векторно-матричного рівняння (6) визначимо вектор невідомих коефіцієнтів

$$\bar{\beta} = A^{-1}\bar{b}.$$

Передавальні функції компенсатора мають високий порядок, що зумовлює певні труднощі їх реалізації на промислових контролерах. Тому є необхідність зменшення порядків передавальних функцій, виходячи із вимоги близькості частотних характеристик «оригіналу» і наближеної моделі поблизу частоти кроссовера.

В основі заміни початкової моделі моделлю нижчого порядку лежить метод, де використовуються сингулярні числа Ганкеля [13, 14].

На рис. 3 зображено діаграму Ганкеля, яка побудована за допомогою Matlab-функції `hankelsv()`. Із рисунка 3 випливає, що є три домінуючі стани, які визначають порядок редукованої моделі. Для перевірки якості редукованої і вихідної моделей побудуємо їх частотні і часові характеристики. Для цього спочатку знайдемо передавальну функцію редукованої моделі. Оскільки редукована модель подана у просторі станів, то

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + \bar{b}u(t), \quad (7)$$

$$y(t) = \bar{c}^T \bar{x}(t) + du(t), \quad (8)$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix};$$

$\bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ ,  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  – змінні станів каналу компенсатора перехресних зв'язків з передавальною функцією  $w_{ij}(s)$ ;  $y(t), u(t)$  – вихідна і вхідна величини моделі;  $d$  – скалярна величина.

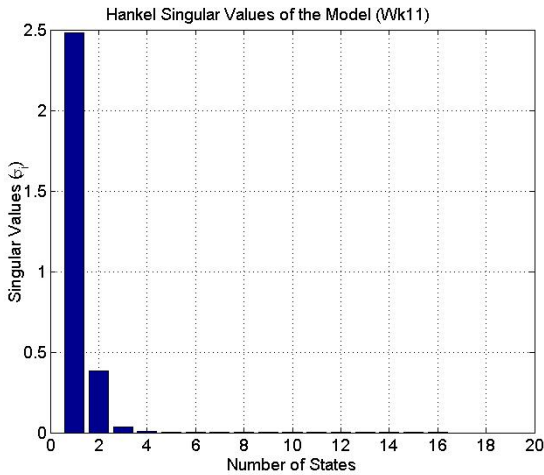


Рис. 3. Діаграма сингулярних чисел Ганкеля

Рівняння (7) і (8) перетворимо за Лапласом при нульових початкових умовах. У результаті отримаємо

$$s\bar{X}(s) = A\bar{X}(s) + \bar{b}U(s),$$

$$Y(s) = \bar{c}^T \bar{X}(s) + dU(s).$$

Звідси знаходимо спрощену передавальну функцію одного із каналів компенсатора

$$w(s) = \bar{c}^T (Is - A)^{-1} \bar{b} + d, \quad (9)$$

де  $I$  – одинична матриця.

За допомогою програмного забезпечення, розробленого в середовищі MatLab, отримані редуковані передавальні функції компенсатора перехресних зв'язків, кожна із яких має третій порядок.

Оскільки передавальні функції компенсатора перехресних зв'язків є однотипні, то для  $n=3$  вони будуть такими (без врахування нижніх індексів):

$$w(s) = \frac{b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}.$$

Параметри передавальних функцій розміщені у таблицях 5–7.

Таблиця 7

Параметри коректора по каналу  $w_{21}(s)$

| i,k | $a_k$      | $a_k$     |
|-----|------------|-----------|
| 0   | -9.741     | 1.000     |
| 1   | -0.1995    | 0.01839   |
| 2   | -0.002326  | 0.00017   |
| 3   | -1.128e-05 | 6.315e-07 |

Зауважимо, що  $w_{11}(s) = w_{22}(s)$ . Тому параметри редукованої моделі для  $w_{22}(s)$  будуть визначатись таблицею 5.

Як приклад, для перевірки якості процедури спрощення моделі  $w_{11}(s)$  були побудовані логарифмічні частотні характеристики початкової і редукованої моделей (рис. 4).

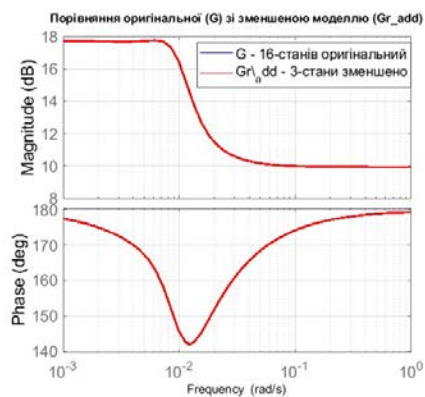


Рис. 4. Порівняння частотних характеристик оригінальної і спрощеної моделей

Аналіз рисунку 4 показав, що у робочому діапазоні частот частотні характеристики дуже мало відрізняються між собою.

Тепер порівняємо між собою перехідні характеристики, які побудовані для початкової і спрощеної моделей (рис. 5).

Таблиця 5

Параметри коректора по каналу  $w_{11}(s) = w_{22}(s)$

| i,k | $b_i$     | $a_k$     |
|-----|-----------|-----------|
| 0   | 2.452     | 1.000     |
| 1   | 0.06121   | 0.01809   |
| 2   | 0.0007002 | 0.0001535 |
| 3   | 3.592e-06 | 5.341e-07 |

Таблиця 6

Параметри коректора по каналу  $w_{12}(s)$

| i,k | $b_i$      | $a_k$     |
|-----|------------|-----------|
| 0   | -0.3657    | 1.000     |
| 1   | -0.01278   | 0.01861   |
| 2   | -0.0001804 | 0.0001519 |
| 3   | -1.069e-06 | 4.965e-07 |

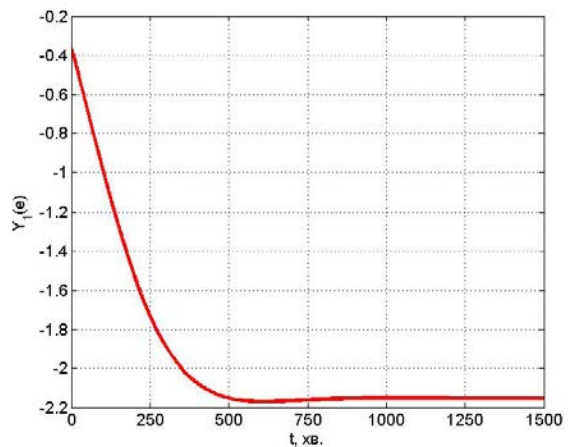


Рис. 5. Перехідні характеристики оригінальної і спрощеної моделей (передавальна функція  $W_{11}(S)$ )

Як показує рисунок 5, перехідні характеристики оригінальної і спрощеної моделей практично не відрізняються між собою. Для оцінки точності апроксимації була визначена похибка розбіжності між вихідною і редукованою моделями за такою формулою:

$$\delta_{ij}^{(\max)} = \max_t \left| \frac{y_{ij}^{(or)}(t) - y_{ij}^{(r)}(t)}{y_{ij}^{(or)}(t)} \right| \cdot 100\%, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (10)$$

де  $y_{ij}^{(or)}(t)$ ,  $y_{ij}^{(r)}(t)$  перехідні характеристики оригінальної і спрощеної моделей.

За формулами, які подібні до формули (10), були обчислені похибки апроксимації за логарифмічними частотними характеристиками (табл. 8).

Значення похибок апроксимації для кожної із трьох моделей ( $w_{11}(s) = w_{22}(s)$ ) наведені в табл. 8.

Таблиця 8

**Похибки апроксимації**

| Модель      | Похибка апроксимації за перехідними характеристиками, % | Похибки апроксимації за ЛЧХ, % |            |
|-------------|---|--------------------------------|------------|
|             |   | за амплітудою                  | за фазою   |
| $w_{11}(p)$ | 1.5611e-02  | 1.4484e-02                     | 1.7411e-01 |
| $w_{12}(p)$ | 2.1846e-02  | 2.3184e-02                     | 6.1880e-03 |
| $w_{21}(p)$ | 5.1275e-03  | 2.5465e-03                     | 6.2829e-03 |

Аналіз таблиці 8 показує, що похибки, які виникли внаслідок спрощення математичних моделей компенсатора перехресних зв'язків, знаходяться в межах від 5.1275e-03% до 1.7411e-01%. Таке незначне значення похибки апроксимації свідчить про те, що з прийнятною для практики точністю

оригінальні моделі 16-го порядку можна замінити моделями значно нижчого, а саме третього порядку.

Для оцінки ефективності роботи синтезованого коректора перехресних зв'язків створена імітаційна модель, яка зображена на рисунку 6.

Модель складається з компенсатора (представлений Sub системою «Коректор») та моделі печі термічної обробки (Sub система «Муфельна піч»). Імітаційний експеримент здійснювався у такому порядку. Задали робочу точку (температуру в контрольних точках на заготовці  $t_v \approx t_n = 660^\circ C$ ) шляхом підбору потужності нагріву (наближено баланс досягнуто при потужності  $U_{kn} = 50\%$  та  $U_{kv} = 20\%$  – відповідно для нижнього та верхнього тенів).

Потім сформувавши стрибкоподібні зміщення робочої точки окремо по кожному з входів компенсатора  $SP_v$  та  $SP_n$  у відповідності до часової діаграм, зображеної на нижнього графіку (рис. 7).

В момент часу 2000 хв стрибкоподібно зменшили сигнал на вході каналу керування для нижнього тону і спостерігали за зміщенням робочих точок по верхній діаграмі (рис. 7). Нижня робоча точка змістилась з  $660^\circ C$  до  $649^\circ C$  (тренд  $t_n$ ) при цьому не відбулося зміщення температури  $t_v$  (ділянка 2000...4000 хв).

При стрибкоподібному зміщенні по  $SP_v = 0 \rightarrow 5$  в момент часу 4000 хв відбулася зміна температури у верхній контрольній точці  $t_v$  з  $660^\circ C$  до  $6825^\circ C$  при цьому  $t_n$  залишилась на попередньому рівні.

Зміна сигналів  $U_{kv}$  і  $U_{kn}$  на виході компенсатора зворотних зв'язків зображена на середній діаграмі трендів (рис. 7). Зміна даних сигналів приводить до компенсації перехресних канали в об'єкті керування.

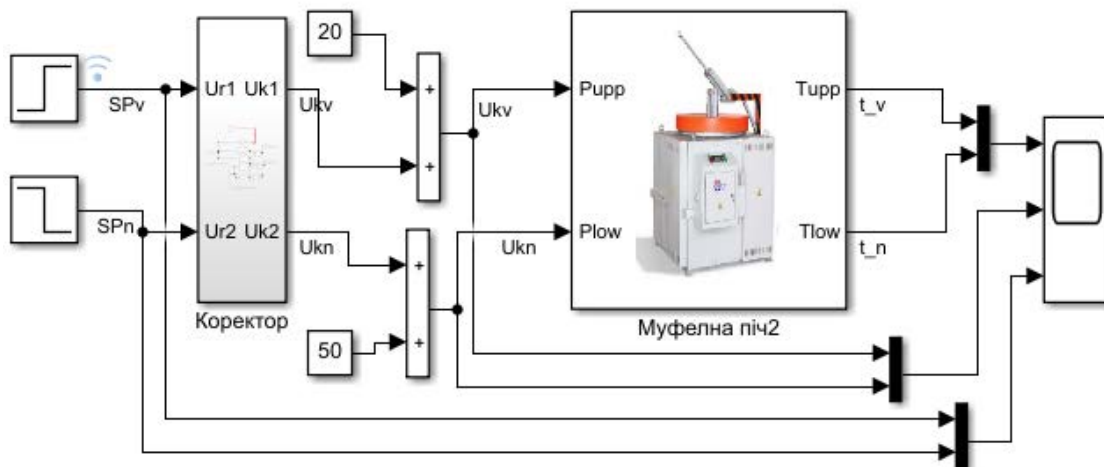


Рис. 6. Імітаційна модель об'єкта з компенсатором

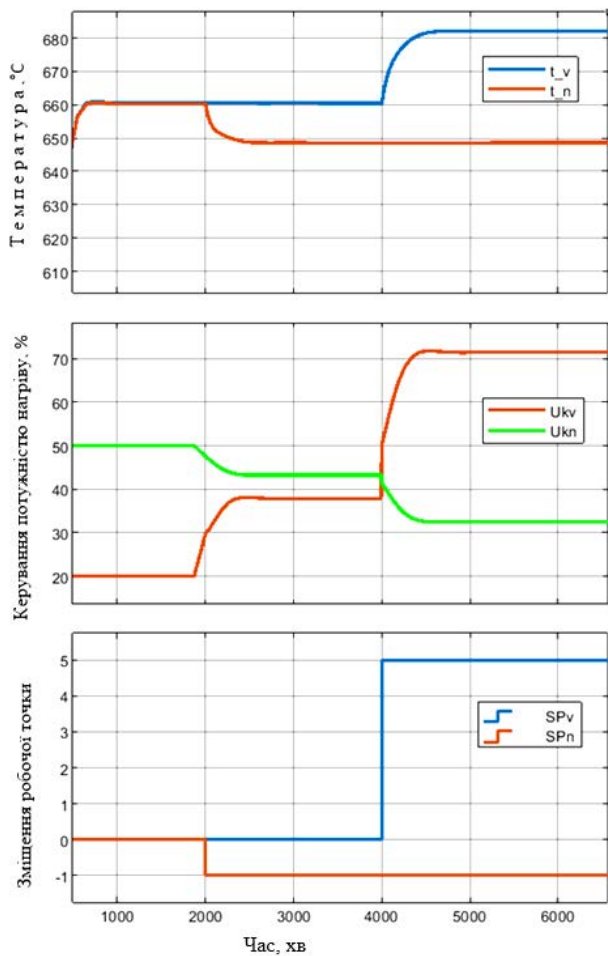


Рис. 7. Дослідження роботи коректора на об'єкті

**Висновки.** 1. Розроблений метод редукції моделей компенсатора зворотних зв'язків, як елемента автоматичної системи керування температурним режимом муфельної печі, дає змогу понизити порядок його передавальних функцій з  $n=6$  до  $n=3$  і тим самим полегшити процес практичної реалізації компенсатора на промислових контролерах.

2. Розроблене алгоритмічне і програмне забезпечення методу редукції моделей компенсатора перехресних зв'язків дало змогу провести обчислювальні експерименти і установити, що відносна похибка апроксимації між оригінальною і редукованою моделями не перевищують  $1.7411e-01\%$  (табл. 8).

3. Результати імітаційного моделювання температурного режиму муфельної печі показали, що отримана задовільна компенсація дії перехресних каналів, яка залежить від точності математичного опису редукованих каналних компенсаторів. Канали стають автономними за рахунок сформованих сигналів корекції  $U_{kv}$  та  $U_{kn}$ . Сигнали перехресних зв'язків при зміщенні робочої точки на вході узагальненого об'єкта (коректор сумісно з муфельною піччю) не передаються перехресними каналами на виходи  $t_v$  та  $t_n$ . Отже, синтезовані коректори можна використати при синтезі автономної системи автоматичного керування температурним режимом муфельної печі.

#### Список літератури:

1. Горбійчук М.І., Лазорів Н.Т. Емпіричні моделі муфельних печей. *Інформаційні технології в освіті, техніці та промисловості. Збірник тез доповідей*. Івано-Франківськ, 2022. С. 47 – 48.
2. Горбійчук М.І., Лазорів Н.Т., Когутяк М.І., Лазорів А.М. Дослідження динамічних властивостей компенсатора перехресних зв'язків автономної системи керування. *Методи та прилади контролю якості*. 2022. № 2 (49). С. 74 – 88.
3. Lemke F. Self-organising Modelling for Decision Support / International Conference in Inductive Modelling ICIM' 2013. URL: <http://www.mgua.irtc.org.ua/attach/ICIM-IWIM/2013/3.9%20.pdf> (дата звернення 09.04.2023)
4. Gorbiyчук M., Bila O., Humeniuk T. Modeling the parallelism of empirical models of optimal complexity using a petri net. *Earsten-European Journal of Enterprise Technologies*. 3/4(99). 2019. Pp. 56 – 68.
5. Системи автоматичного керування технологічними комплексами: навч. посібник / Сільвестров А.М. та ін. К.: КПІ ім. І. Сікорського, 2022. 466 с.
6. Жученко О.А., Хібеба М.Г. Розробка спрощеної математичної моделі процесу формування вуглецевих виробів. *Технологічний аудит та резерви виробництва*. 2018. № 5. С. 16 – 21.
7. Ревун Н. П., Зінченко В. Ю., Іванов В. І., Мосейко Ю. В. Модель динаміки нагрівника металу в полумєневих печах. *Математичне моделювання*. 2016. №1 (34). С. 32 – 34.
8. Верлань А.Ф., Махович О.І. Підхід до вибору опорних перерізів в інтерполяційному методі редукції моделей об'єктів із розподіленими параметрами *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Технічні науки: зб. наук. пр. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільськ. нац. ун-т, 2017. Вип. 15. С. 30-36.
9. Huijun Gao, James Lam \* Changhong Wang & Qing. Wang Hankel norm approximation of linear systems with time-varying delay: continuous and discrete cases // *International Journal of Cjntrol*. 2004-Issue 17, Volume 77. P. 1503–1520.
10. Павлюков М.С., Ляшенко І.М., Приймак Б.І. Зменшення порядку моделі електроприводу ланки зварювального маніпулятора URL: <https://epa.kpi.ua/science/publications/spea-2018/https-epa-kpi-ua-page-id-19638/> (дата звернення 09.04.2023).



11. Спрощення моделей установок вищого порядку – Приклад MATLAB & Simulink URL: [www-mathworks-com.translate.goog](http://www-mathworks-com.translate.goog) (дата звернення 09.04.2023).
12. Горбійчук М.І., Лазорів Н.Т. Дискредитація математичних моделей лінійних об'єктів керування. *Journal Věda a perspektivy: kategorie B. Čechia*. № 1 (8) (2022). Pp. 241 – 254.
13. Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkatasubramanian Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: Siam, 1994. 205 p.
14. Kuster George E. H-infinity Norm Calculation via a State Space Formulation. URL: [https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/49544/Kuster\\_GE\\_T\\_2013.pdf?isAllowed=y&sequence=1](https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/49544/Kuster_GE_T_2013.pdf?isAllowed=y&sequence=1) (дата звернення 26.09.2022)

**Gorbiychuk M.I., Lazoriv N.T., Kohutiak M.I., Lazoriv A.M. SYNTHESIS OF THE OPTIMAL PARAMETERS OF THE CROSS-CONNECTION COMPENSATOR OF THE AUTONOMOUS CONTROL SYSTEM**

*Muffle furnaces with two independent power sources, in addition to direct channels of influence of input values on output values, have cross channels of such influence that it significantly complicates the automatic control of the thermal mode of the furnace. One of the methods of compensation of cross-effects is the introduction of a cross-connection compensator into the control circuit.*

*On the basis of experimental studies, the transfer functions of each signal transmission channel were obtained. All four transfer functions have third order. It is shown that the synthesis of the autonomous control system generates a cross-connection compensator, which is characterized by four transfer functions identical in structure, each of which has the sixteenth order. Such a high order of transfer functions significantly complicates their practical implementation on modern microprocessors (controllers). Therefore, the problem arose of simplifying the transmission functions of the compensator without significantly losing the efficiency of its functioning.*

*The analysis of literary sources showed that there are currently a number of methods and ways of simplifying mathematical models of dynamic systems. The shortcoming of the analyzed works is the lack of formalized criteria, which can be used to assess the degree of approximation of the reduced model to its "original". One of the ways to overcome this shortcoming is to use Hankel's method for reducing models that are given in the form of transfer functions. In contrast to frequency characteristics, which characterize the distribution of energy by frequency, Hankel's method makes it possible to determine the distribution of energy by object states, which is graphically displayed in the form of a bar chart. According to the dominant columns on the Hankel diagram, the orders of the transfer functions of the reduced model were determined. It was established that the orders of the transfer functions of the compensator can be reduced from sixteen to three. The accuracy of the reduced model in relation to the "original" was checked by comparing their transient and frequency characteristics, which made it possible to establish their insignificant difference.*

**Key words:** muffle furnace, transfer function, model reduction, Hankel method, accuracy.